

R5土質力学講座 第3回【土の限界状態】

2023年12月7日 16:00~17:30

(公社)地盤工学会 北陸支部

講師 小林 俊一 (金沢大学)

講座内容

- ヨーロッパ系の土質力学テキストでは、せん断と圧密を限界状態理論に基づいて統一的に記述する。過圧密比や排水条件による土のせん断挙動の違いを限界状態理論により説明する。
- $e - \log p'$ 関係： 載荷・除荷・再載荷、正規圧密・過圧密、間隙比 e (比体積 v) $v = (1 + e)$ 、有効平均応力 p'
- 土のせん断：ズレ変形、有効応力の原理、破壊基準
- 三軸圧縮試験：軸応力・側方応力・間隙水圧、排水・非排水、有効平均応力・軸差応力 (p', q)
- 限界状態：三軸圧縮試験の最終状態では間隙比一定で応力変化がなく、せん断ひずみのみが進行する状態。限界応力比 $M_f = \frac{q_f}{p'_f}$

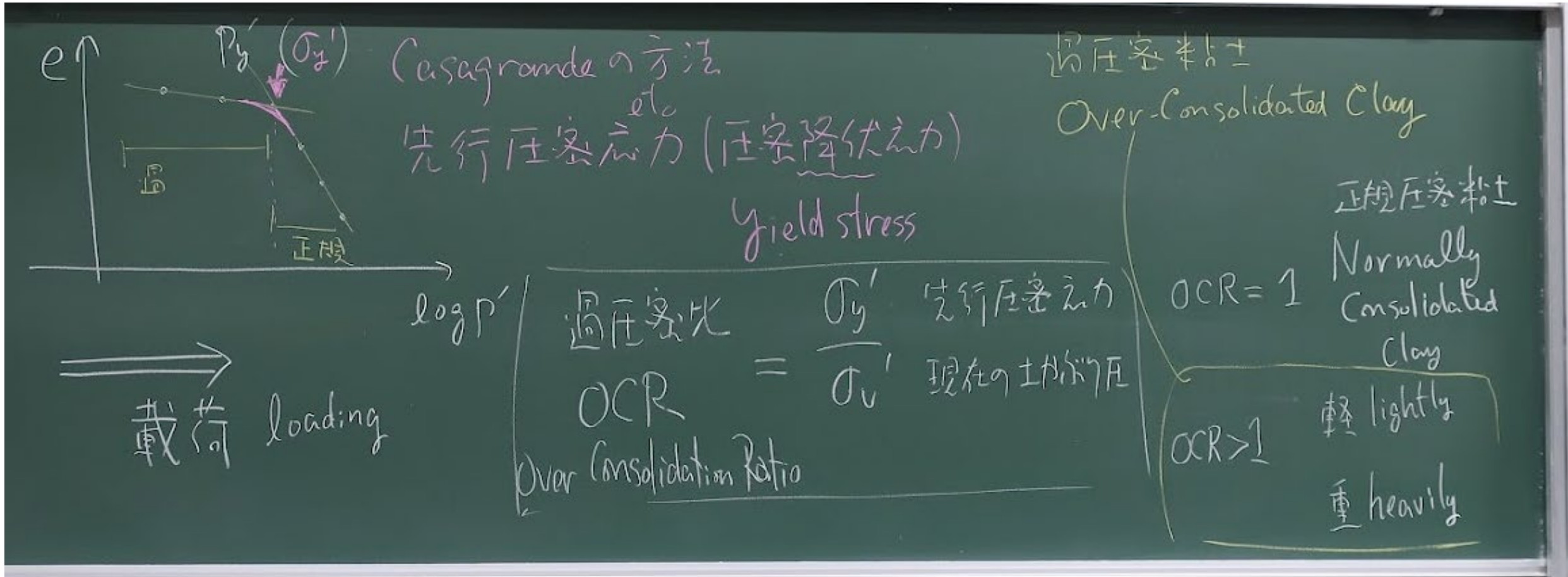
講義の目標

- 土の圧密（＝体積変化）とせん断変形（＝ずれ変形）は密接に関係することを理解する
- 限界状態理論は練返した粘土の挙動を統一的に説明するモデルであることを理解する
- 三軸圧縮試験を例に正規圧密土や過圧密土の排水あるいは非排水せん断挙動を説明できる

圧密挙動（復習）

- $e - \log p'$ 関係：載荷・除荷・再載荷、正規圧密・過圧密、間隙比 e （比体積 v ） $v = (1 + e)$ 、有効平均応力 p'
- 載荷：圧縮指数 (Compression) C_c ：弾塑性：非可逆
- 除荷・再載荷：膨潤指数 (Swelling) C_s ：弾性：可逆
- 過圧密比 (OCR: Over-consolidation ratio)
- 正規圧密状態：OCR=1
- 過圧密状態： $1 < OCR$, 正規圧密粘土 (=1) < 軽過圧密土 Lightly OC Soil < 重過圧密 Heavily OC Soil

粘土の $e - \log p'$ 関係

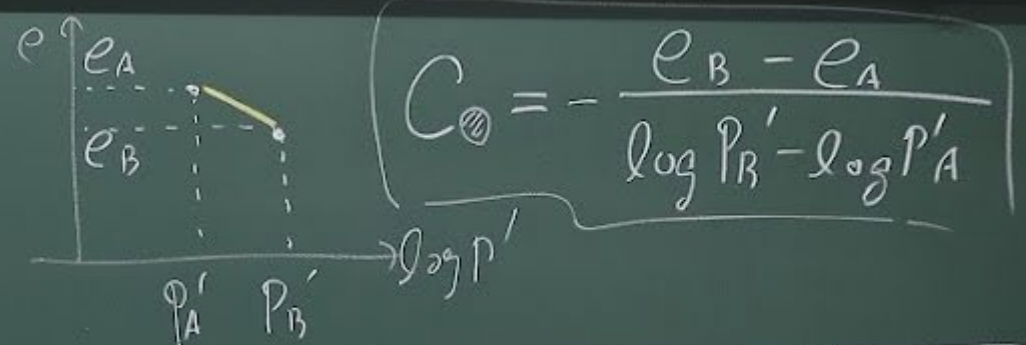


粘土の載荷・除荷と応答（時間が十分二経過した後）



粘土の載荷・除荷と応答（過圧密比）

状態	圧密降伏応力	OCR	
↓ 載荷	P'_A	1	正規圧密
	↓ 増加	1	〃
↓ 除荷	P'_B	P'_B / P'_A	過圧密
	変化なし		
↓ 再載荷	P'_B ($P'_B < P'_B$ あり)	P'_B / P'_B	過圧密
↓ 載荷	P'_E (増加)	1	正規圧密



	剛性	挙動
正規圧密	小さい (変形しにくい)	弾塑性 = 不可逆
過圧密	大きい (変形しにくい)	弾性 = 可逆

応力について（基礎知識）

- 【応力テンソル】 応力 σ_{ij} は2階のテンソル（=行列）：作用面の法線方向の情報と、作用する単位体積あたりの力の向きが必要。それを2つの下添字で表す。
- 【直応力】 面の法線方向と同じ向きの応力成分を直応力という。
- 【せん断応力】 面の法線方向に直交する向きの応力成分をせん断応力という。
- 【対称性】 回転に対する釣り合いから応力テンソルには対称性。 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$
- 【独立な成分】 3次元問題では応力テンソルは 3×3 であるが、そのうち独立な成分は6個
- 【主応力・主軸】 座標系をうまく選べば、直応力3つのみが現れる直交直線座標系が存在する。このときは σ_1 のように下添え字を1つ用いる。この方向を主軸、直応力値を主応力値という。
- 【等方性材料の記述】 等方性材料の性質は記述するためには、主軸（主応力、主ひずみ）を用いれば十分。
- この講義では、主軸、主応力を使って説明する。

せん断挙動（復習 1）

- 応力：ある仮想面の作用する単位面積あたりの力（圧力と同じ次元）
- ひずみ：変形の割合（無次元量）
- 直応力（垂直応力）：面の法線方向に働く応力。正負は座標系と関連付ける。土では圧縮を正に取ることが多い。
- せん断応力：面の法線方向と直交する方向に働く応力。3次元では同一面に直交する2つのせん断応力。正負は座標系と関連付ける。
- せん断変形 = ずれ変形
- せん断力・応力：ずれ変形を生じさせる一組の共役な力・応力

せん断挙動（復習2）

- 有効応力：全応力から間隙水圧を差し引いた応力。なお、せん断応力は全応力もせん断応力も等しい。
- 有効応力の原理：土骨格の挙動は有効応力で表現できるという考え方
- 破壊基準：土の破壊条件は応力の関数で書ける。たとえばモール・クーロンの破壊基準

せん断変形とは

せん断変形とは、ずれ変形のことです。

ずれ変形は具体的に以下のような変形です。分かりますか？

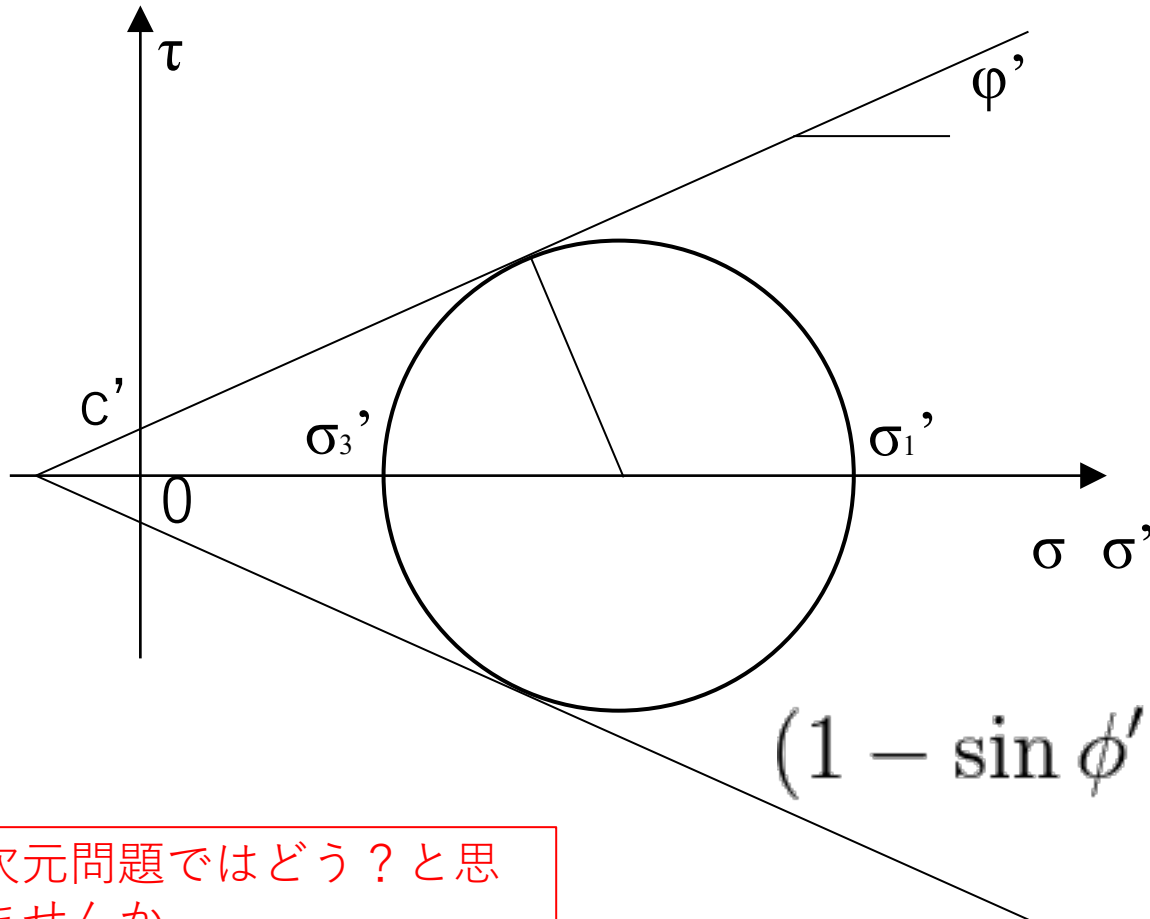


せん断変形を生じさせるためには、

面に沿った方向に、大きさが同一で向きが逆となる1組の力を作用させる。

これを『**共役（きょうやく）なせん断力**』という。

モール・クーロン破壊規準と破壊時の応力



2つの主応力が満たす
関係

$$\sin \phi' = \frac{\frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2}}{\frac{c'}{\tan \phi'} + \frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2}}$$

式変形すると、以下の
ようにも書ける。

$$(1 - \sin \phi')\sigma'_1 - (1 + \sin \phi')\sigma'_3 = 2c' \cos \phi'$$

3次元問題ではどう？と思
いませんか

地盤材料の挙動を調べる試験（要素試験）

- 等方性材料、あるいは直交異方性材料であれば、3つの主応力を独立に制御できる試験で材料挙動を調べられる。
- 供試体が均一場（同じ応力やひずみ）であることを前提にしており、『**要素試験**』と呼ばれる。（cf. 一般に『**模型実験**』では、位置によって応力やひずみが異なる）
- **三軸試験**は土の挙動を調べる代表的な土質実験で、**2つの主応力を独立に制御**でき、かつ**排水条件も制御**できる特徴がある。

その他の要素試験として、一面せん断試験、1軸圧縮試験などがある。

- **一面せん断試験**は、すべり面上の応力状態（直応力、せん断応力）を直接実験的に求められる。一方、それ以外の応力成分が不明のため、応力円が描けない欠点がある。
- **一軸圧縮試験**は、側方応力ゼロ、かつ排水条件を制御しない点で、3軸試験の特殊な場合と言える。また、十分に速い速度で載荷を行い、非排水条件が満足されていると解釈する。

三軸圧縮試験（土の代表的な要素試験）

- 載荷の方法
 - 軸応力 σ_a と側方応力 σ_r （2つの主応力）を制御
 - 軸応力は固体圧で載荷し、応力制御と変位制御の両方に対応する試験機が多い
 - 側方応力は液体圧で載荷し、応力制御のみ可能な試験機が多い。
- 水理境界条件（排水条件）の制御
 - 供試体にはゴムスリーブを付け、側面からの水の出入りができない。
 - 供試体の上部・下部からパイプを設置し、コックの開閉で水の出入りを制御
 - 排水時は、供試体の体積変化 δV を測定
 - 非排水時は、体積が一定となり間隙水圧が生じるので、間隙水圧 u を測定
- 計測項目
 - 変形に関する量：軸変位量、体積変化量（排水時）
 - 力に関する量：軸応力、側方応力、間隙水圧（非排水時）

三軸圧縮試験の載荷過程

- 載荷過程：第1段階の圧密過程、第2段階のせん断過程の2段階に分けられる。
- 圧密過程（第1段階）
 - 等方圧密（軸応力＝側方応力）で所定の圧密応力を載荷。排水コックは開（体積変化許容）。
 - さらに、過圧密状態にするためには、排水コックを開けたまま、等方的（軸応力＝側方応力）に所定の応力まで除荷。
- せん断過程（第2段階）
 - 水理境界条件：【排水条件】排水コックを開、あるいは【非排水条件】排水コックを閉。
 - 側方応力を一定に保ったまま、軸応力のみを増加させる。
 - 載荷制御条件：
 - 【荷重制御】軸応力を増加。
 - 【変位制御】軸方向に供試体を圧縮変形させ、供試体に働く力を荷重計で測定する。
- （注）3軸試験機は、軸応力と側方応力の両方を同時に変化させることも可能である。

三軸試験の分類

- 第1段階の圧密過程、第2段階のせん断過程の組合せ：UU、CU、CD試験
 - 最初の文字は圧密条件（非圧密Unconsolidated、圧密Consolidated）を表す
 - 次の文字はせん断時の排水条件（非排水Undrained、排水Drained）を表す
 - バー（横棒）を付けると、間隙水圧を測定する試験。現在では、間隙水圧の測定は一般的であるのでしばしば省略。
- **UU 非圧密非排水せん断試験**：圧密を行わず、非排水せん断を行う。
 - 有効応力で整理すれば、破壊状態の応力円はただ1つ。
 - 条件過少のため2パラメータ (c' , ϕ') は求められない。そこで $c'=0$ と考えて整理し、破壊円に接する破壊包絡線を引き、非排水せん断強度 C_u を求める。
- **CU 圧密非排水せん断試験**：圧密後、排水コックを閉じてせん断を行う。非排水せん断挙動を計測。砂・粘土を問わず広く利用される。
- **CD 圧密排水せん断試験**：圧密後、排水コックを開けたまません断を行う。排水せん断挙動を計測。主に砂質材料で用いる。粘性土の場合は過剰間隙水圧が発生しないよう、極めてゆっくりと載荷する。

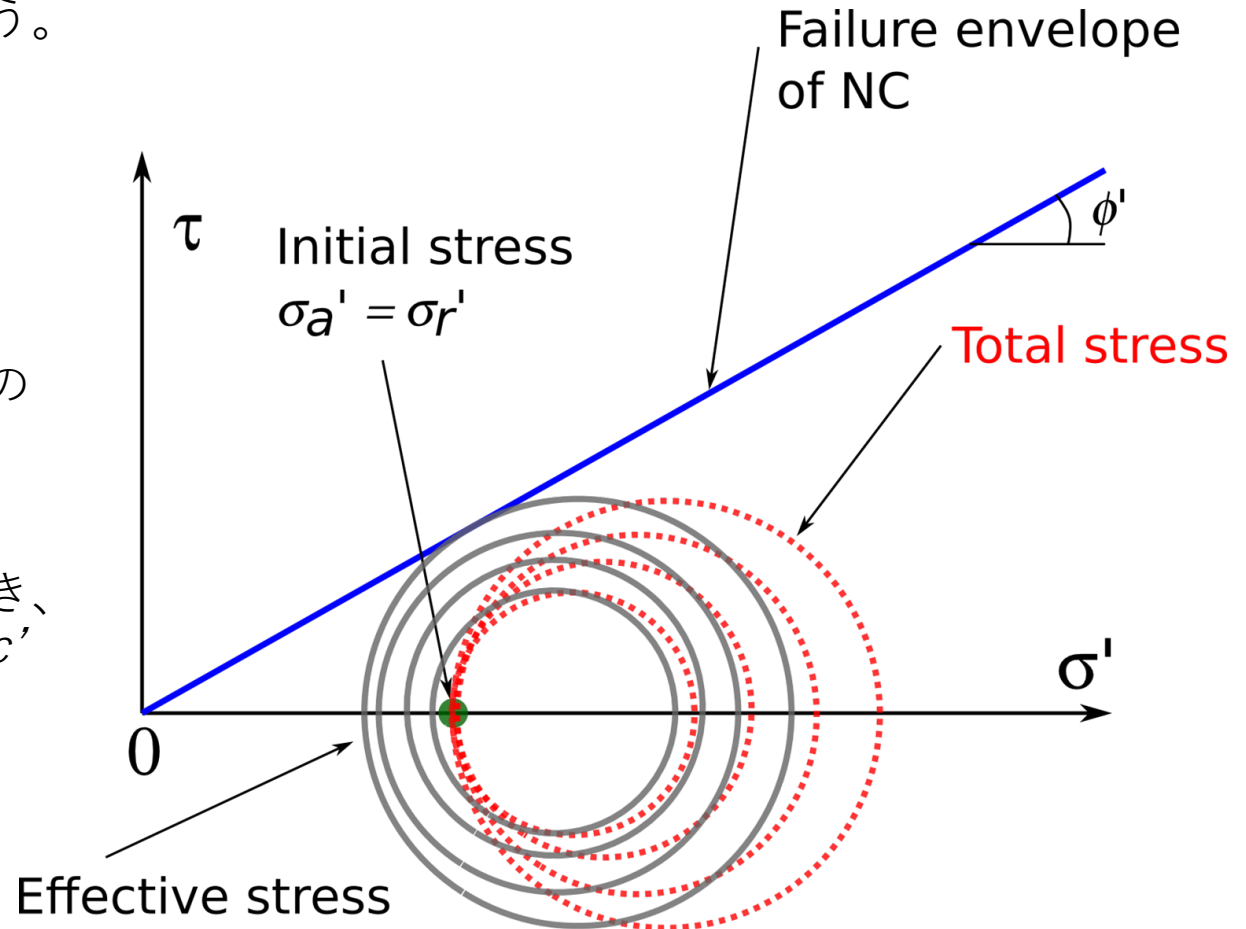
三軸試験結果の整理

- CU 圧密非排水せん断試験：圧密後、排水コックを閉じてせん断を行う。
 - 有効応力経路 Effective Stress Path (p', q) を図示。
 - ここに有効平均応力 $p' = p - u$ 、平均応力 $p = (\sigma_a + 2\sigma_r)/3$ 、軸差応力 $q = \sigma_a - \sigma_r$
 - 限界状態まで載荷。
 - 限界状態の応力比（限界応力比） $M_f = q_f/p'_f$ を計算。
 - せん断中の間隙比は一定
- CD 圧密排水せん断試験：圧密後、排水コックを開けたまません断を行う。
 - 全応力経路 Total Stress Path (p', q) を図示。排水試験では過剰間隙水圧 u_e が発生しないので、全応力経路の傾きは $dq/dp' = (d\sigma_a - d\sigma_r)/\{(d\sigma_a + 2d\sigma_r)/3 - du_e\} = 3$ の直線。
 - 限界状態まで載荷。
 - 限界状態の応力比（限界応力比） $M_f = q_f/p'_f$ を計算。
 - 体積変化を計測し、限界状態での間隙比を計算。

三軸圧縮試験（非排水せん断）とモールの の応力円

- 圧密過程では、所定の圧密応力まで等方圧密を行う。
つまり正規圧密状態の供試体を作成する。
- 排水コックを閉じて、非排水条件を課す。
- 軸応力のみを増加させる。
- このとき、モールの全応力円は赤色破線となる。
- 同時に過剰間隙水圧を計測しているので、モールの有効応力円も描ける。これは灰色実線で表される。
- 最終的には破壊に至る。
- 有効応力の破壊応力円の包絡線（青色直線）を描き、この土の強度を求める。（正規圧密粘土の場合、 $c' = 0$ と考えて良い。）

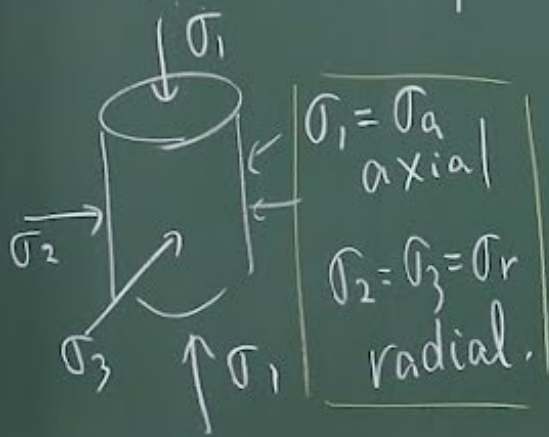
モールの応力円で初期から破壊に至る状況を伝えるのは難しい。
⇒ 応力経路 (p', q) が便利。



平均有効応力 p' 、軸差応力 q

三軸試験では、 p, p', q で整理 主に体積変化

● 平均(全)応力 $p = \frac{\sigma_a + 2\sigma_r}{3}$ ● 平均有効応力 $p' = \frac{\sigma'_a + 2\sigma'_r}{3}$



● 軸差応力 $q = \sigma_a - \sigma_r$ せん断に
関する

$\left. \begin{matrix} \sigma'_a = \sigma_a - u \\ \sigma'_r = \sigma_r - u \end{matrix} \right\} \text{有効応力}$

● $p' = p - u$ であることを確認せよ、

● $q'_s = \sigma'_a - \sigma'_r = q$ であることを確認せよ、

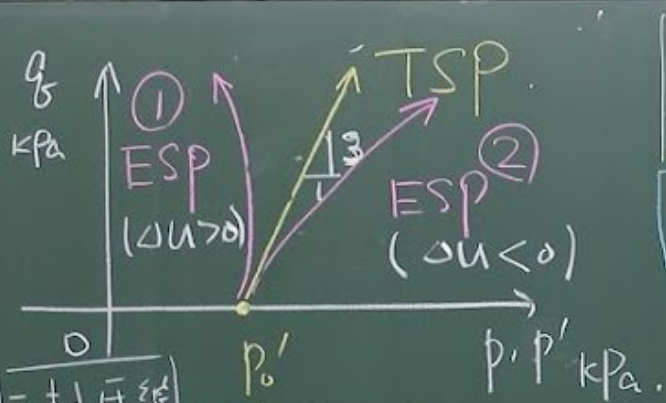
● $p' = \frac{(\sigma_a - u) + 2(\sigma_r - u)}{3} = \frac{\sigma_a + 2\sigma_r - 3u}{3} = p - u$

● $q'_s = (\sigma_a - u) - (\sigma_r - u) = \sigma_a - \sigma_r = q$

三軸圧縮試験では、せん断過程で

$\Delta\sigma_a \neq 0, \Delta\sigma_r = 0$ となる。

全応力経路TSP、有効応力経路ESP



傾き $\Delta q / \Delta p = \frac{\Delta \sigma_a}{\frac{1}{3} \Delta \sigma_a} = 3$

非排水試験
 $p' = p - u$

$$p = \frac{\sigma_a + 2\sigma_r}{3}, \quad \Delta p = \frac{\Delta \sigma_a + 2\Delta \sigma_r}{3}$$

$$q = \sigma_a - \sigma_r, \quad \Delta q = \Delta \sigma_a - \Delta \sigma_r$$

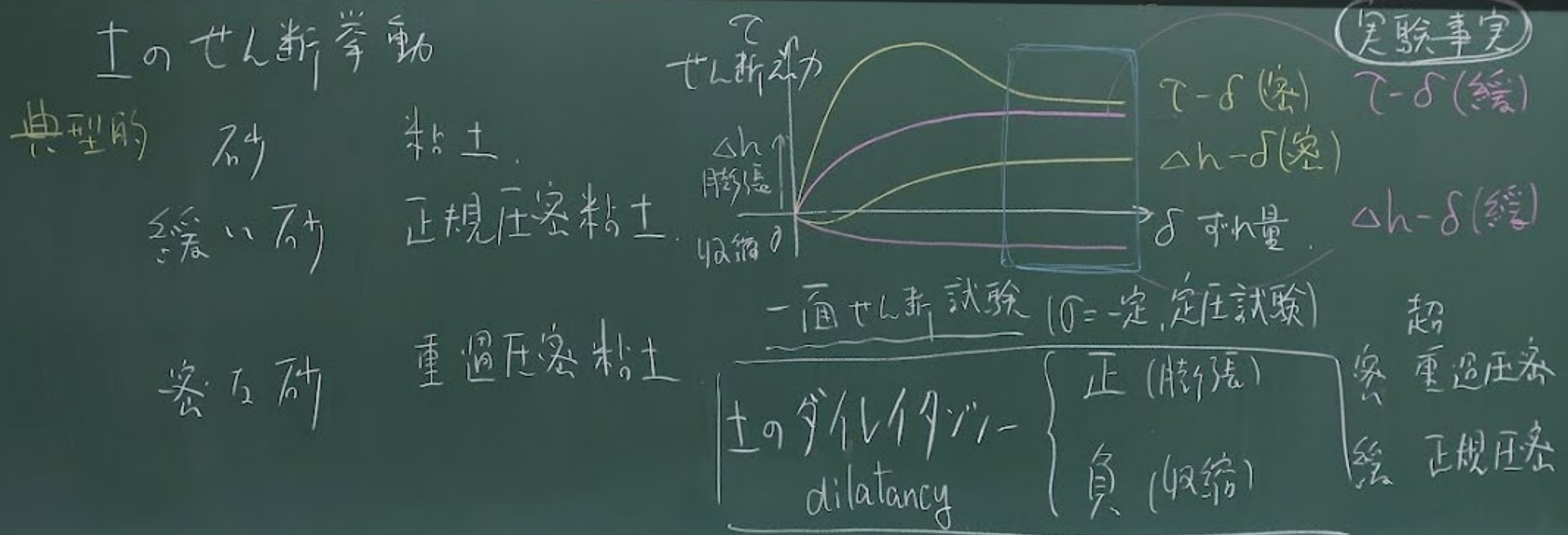
σ_a 増加, σ_r 一定
 $\Delta \sigma_a \neq 0, \quad \Delta \sigma_r = 0$

圧密終了時
 応力経路 Stress Path
 { 全応力経路 TSP
 Total
 { 有効応力経路 ESP
 Effective

$\Delta p' = \Delta p - \Delta u$ 有効応力

- ① 空隙水圧が増加 $\Delta u > 0$ → 有効応力は減少
 - ② 空隙水圧が減少 $\Delta u < 0$ → 有効応力は増加
- 実験の結果より得られる
- 傾き $\Delta q / \Delta p' = \frac{\Delta \sigma_a}{\frac{1}{3} \Delta \sigma_a - \Delta u}$
- $\Delta u > 0$ なら $\Delta q / \Delta p' > 3$
 $\Delta u < 0$ なら $\Delta q / \Delta p' < 3$

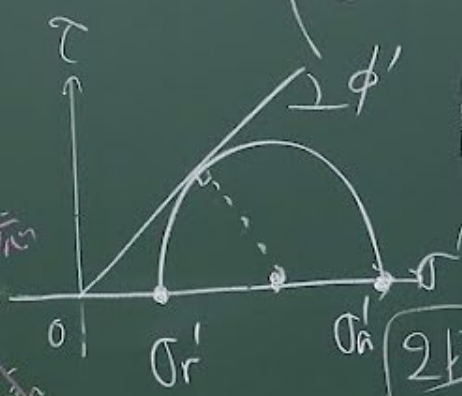
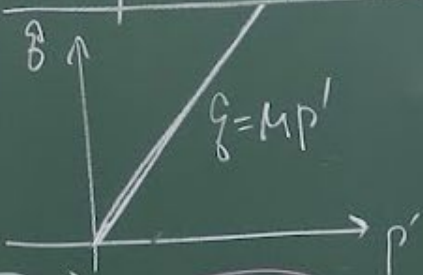
土のせん断挙動（一面せん断試験）と限界状態



限界応力比 M と内部摩擦角 ϕ' の関係

限界応力比 M と内部摩擦角 ϕ' の関係

粘着力 c はここでは無視しておく
 (← 粘土のために!)



$$\sin \phi' = \frac{\sigma_a' - \sigma_r'}{\sigma_a' + \sigma_r'}$$

- ① $\sigma_a' = \sigma_r'$
- ② $p' = \frac{1}{3} \sigma_r'$
 $q = \frac{1}{3} \sigma_r'$

③ $M = q/p' = \frac{1}{3}$

$\phi' = 30^\circ \Rightarrow M = 1.2$

$$\sigma_a' = \frac{1 + \sin \phi'}{1 - \sin \phi'} \sigma_r' \quad \sigma_a' \geq \sigma_r'$$

$$p' = \left\{ \frac{1}{3} \frac{1 + \sin \phi'}{1 - \sin \phi'} + \frac{2}{3} \right\} \sigma_r' = \frac{1 + \sin \phi' + 2(1 - \sin \phi')}{3(1 - \sin \phi')} \sigma_r'$$

$$= \frac{3 - \sin \phi'}{3(1 - \sin \phi')} \sigma_r'$$

$$q = \frac{2 \sin \phi'}{1 - \sin \phi'} \sigma_r'$$

$$M = \frac{q}{p'} = \frac{6 \sin \phi'}{3 - \sin \phi'}$$

③ $p' = \frac{\sigma_a' + 2\sigma_r'}{3}$

$q = \sigma_a' - \sigma_r'$

応力経路



飽和粘土の力学挙動 : (p', q, v) 空間

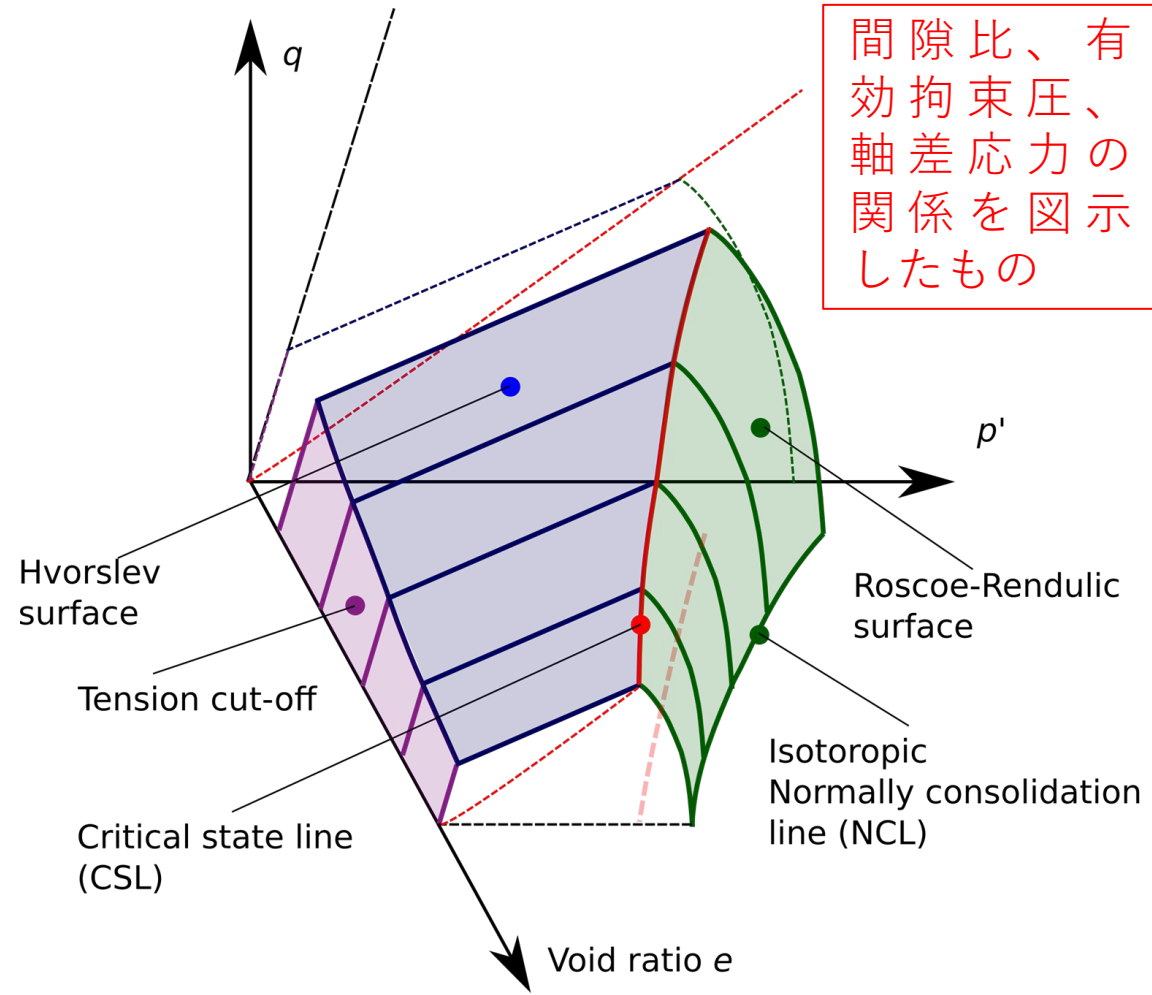
- 限界状態線の発見 Parry (1960) : 正規圧密粘土、排水・非排水
 - (p', q) : 限界状態を示す応力比は一定 $M_f = q_f/p'_f$
 - $(\log p', v)$: 限界状態は正規圧密線と並行
- 一意な関係の発見 Henkel (1960)
 - 正規圧密粘土のせん断 : 応力 (p', q) に対して比体積 $v (= 1 + e)$ が一意に決まる
- (p', q, v) 空間を用いた統一的な表現
- ロスコ一面 (Roscoe Surface) : 正規圧密線から限界状態線に至るまでの経路は (p', q, v) 空間内で曲面を構成する

Critical State Model (限界状態モデル)

- 再構成した（練返した後で圧密した）粘土の挙動を表現するモデル
 - ケンブリッジ大学の研究者（Roscoe, Wroth, Schofield）が提案
 - 他の土の挙動を考える上でも、役立つモデル
- **限界状態 (Critical State)**
 - 土のせん断時に、せん断応力と間隙比の変化がゼロで、せん断変形が生じ続ける状態。土の破壊状態と言っても良い
- 限界状態の応力比 $M = q / p'$ とその時の間隙比 e は、排水せん断、非排水せん断に関わらず、**ユニークな曲線上**にプロットできる。
- 正規圧密粘土をせん断すると、非排水条件、排水条件に関わらず、有効応力経路は**単一の曲面上**を動く。この面をRoscoe-Rendulic面（あるいは**状態境界面**）という。
- **正規圧密曲線 (NCL) と限界状態線 (CSL) は $e - \log p'$ 面上で並行な線**としてモデル化。

State Boundary Surface 状態曲面

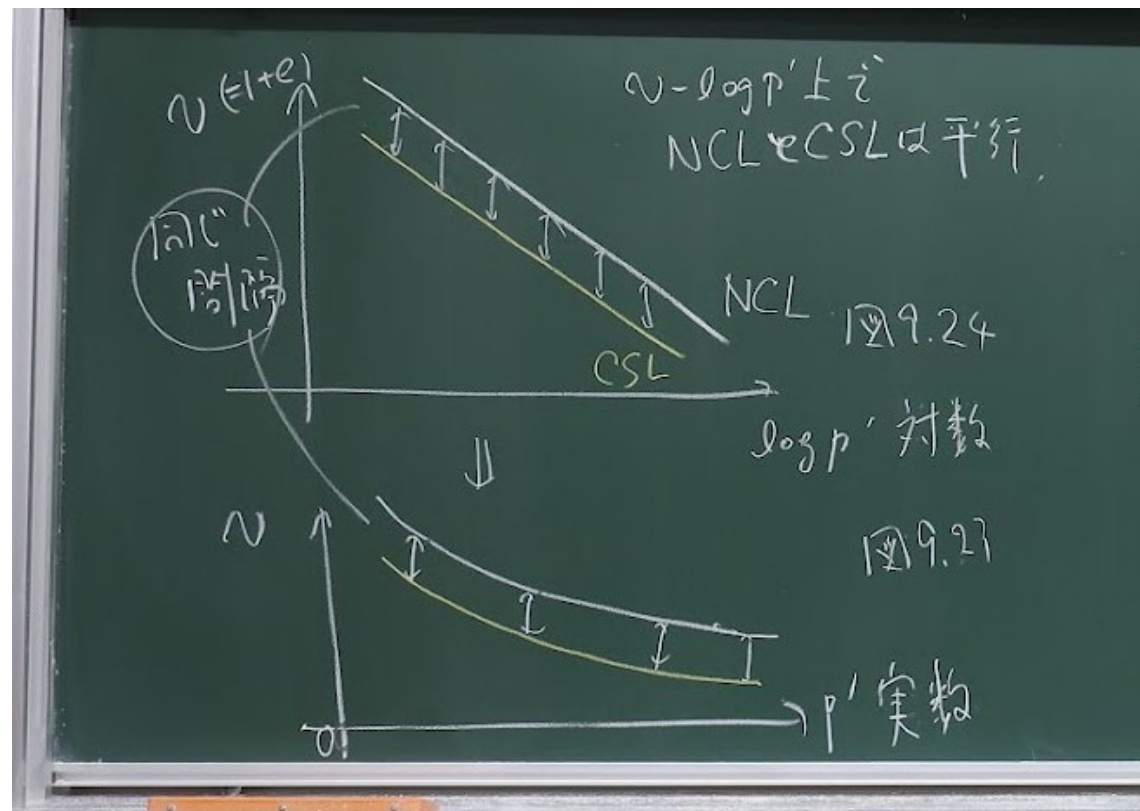
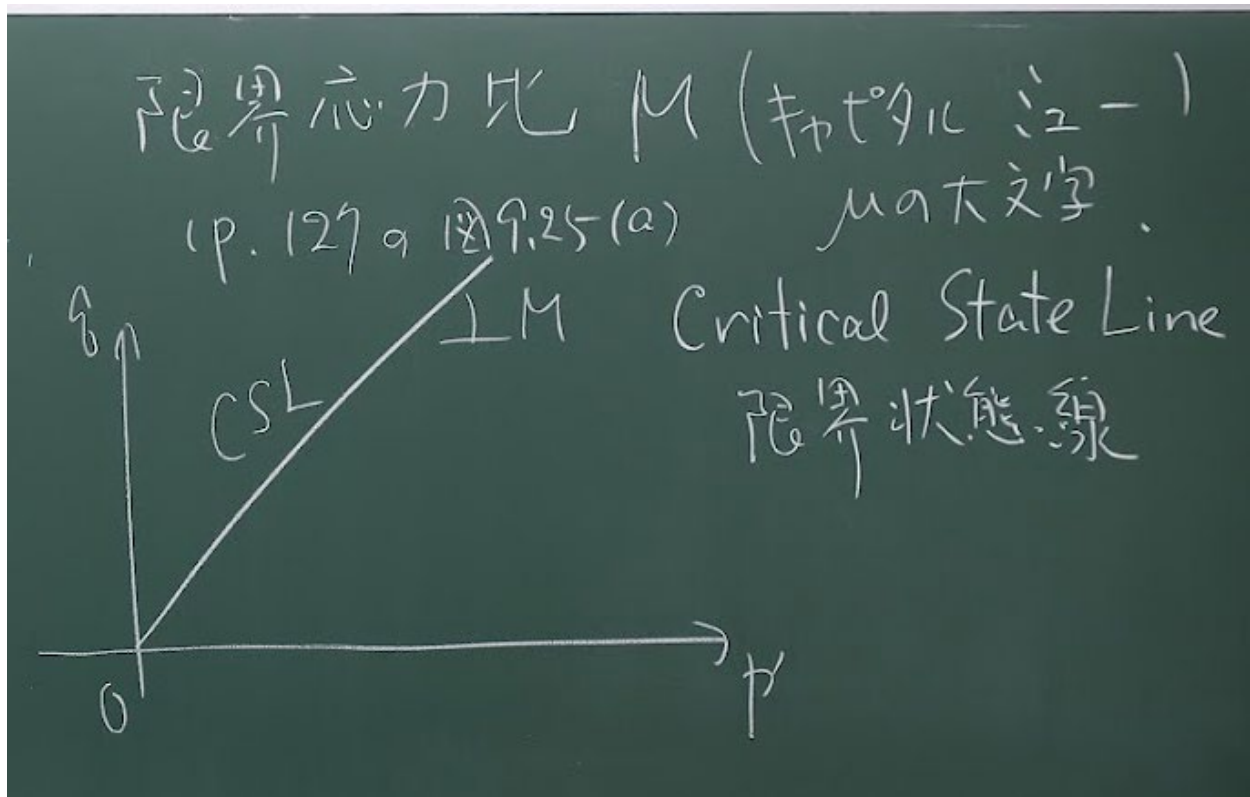
応力や間隙比は、この曲面上あるいは内側の状態しか取りえない



間隙比、有効拘束圧、軸差応力の関係を図示したもの

- **NCL：等方正規圧密曲線**
 - 圧密で習った $e - \log p'$ 関係と同じ。これを実軸 p' で描いたもの
- **CSL：限界状態線**
 - せん断の結果、この線上の条件を満たせば、土は限界状態 = 破壊。 $p' - q$ 面上で傾き M (キャピタル ミュー) となり、限界応力比という。
- **Roscoe-Rendulic surface：ロスコー - レンドリック面 (状態境界面)**
 - 正規圧密側の境界面。正規圧密粘土の有効応力経路はこの面上を辿る。
- **Hvorslev Surface：ボシュレフ面**
 - 過圧密側の境界面。(この授業ではあまり立ち入らない)
- **Tension cut-off：引張側のカットオフ面**
 - 側方応力 $\sigma_r = 0$ となる条件。これ以上左側の応力状態で実験不可能。

状態曲面を平面に投影



飽和粘土の典型的なせん断挙動

- 三軸圧縮試験を例に正規圧密土や過圧密土の排水あるいは非排水せん断挙動を説明する。（ただし室内再構成試料）
- おおよその挙動の説明
 - 入力情報：せん断開始時の状態、せん断時の排水条件、および粘土履歴
 - 出力情報：限界状態での (p'_f, q_f, v) を計算する
- 注意点
 - 挙動の詳細を把握するためには三軸圧縮試験が必要
 - 挙動の詳細を計算するためには、弾塑性論に基づく計算が必要
 - あくまでも室内再構成試料（練り返した土）のせん断挙動
 - 自然堆積土は年代効果のため高位の構造（同じ圧密応力に対して、より間隙比が大きくなる）

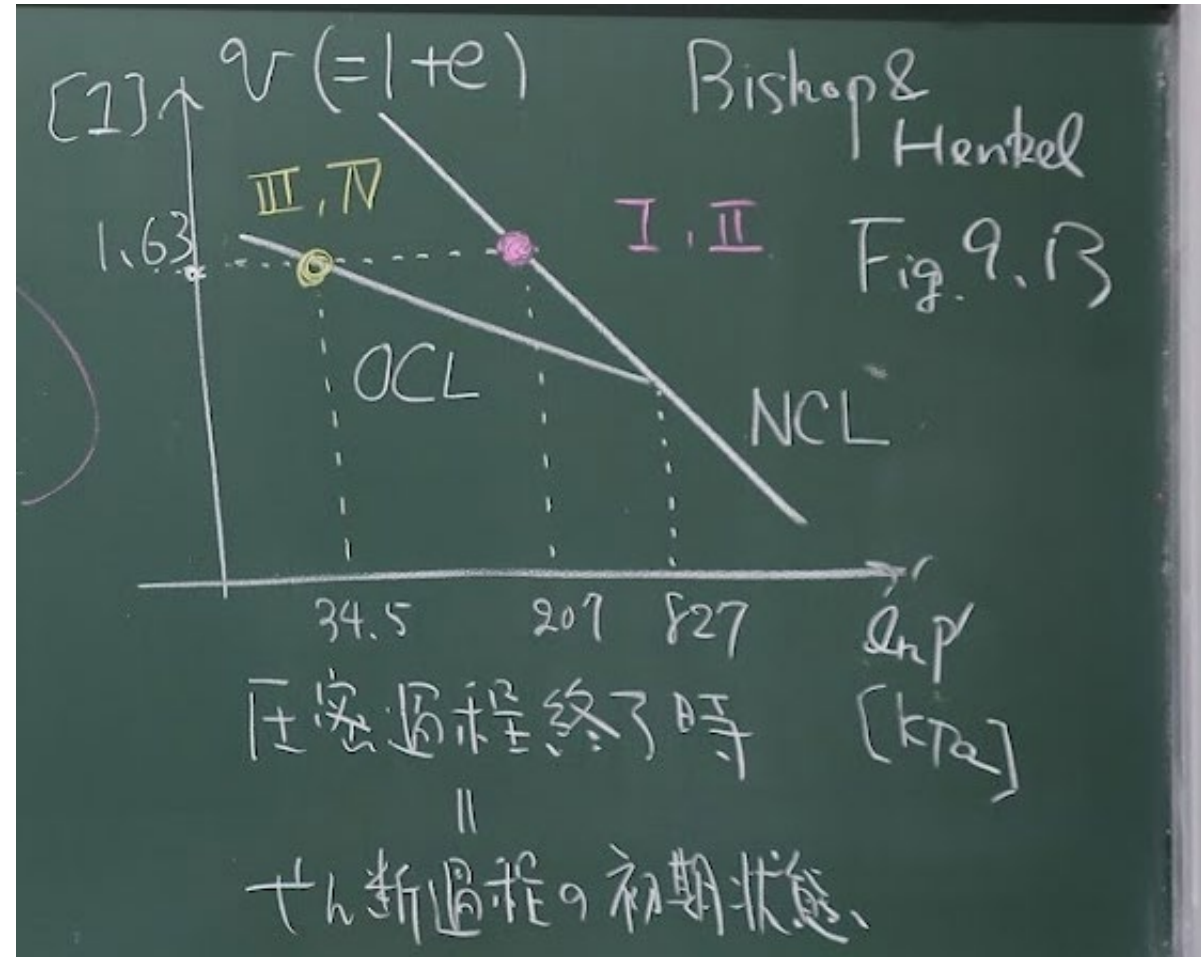
飽和粘土の典型的なせん断挙動

- 三軸圧縮試験を例に正規圧密土や過圧密土の排水あるいは非排水せん断挙動を説明する。
- おおよその挙動であれば説明可能（スタートとゴールは分かる）
 - 入力情報：せん断開始時の状態（平均有効応力、比体積 ← 履歴）、せん断時の排水条件、限界応力比
 - 出力情報：限界状態での (p'_f, q_f, v) を計算する
- 注意点
 - 挙動の詳細を把握するためには三軸圧縮試験が必要
 - 挙動の詳細を計算するためには、弾塑性論に基づく計算が必要
 - あくまでも室内再構成試料（練り返した土）のせん断挙動
 - 自然堆積土は年代効果のため高位の構造（同じ圧密応力に対して、より間隙比が大きくなる）

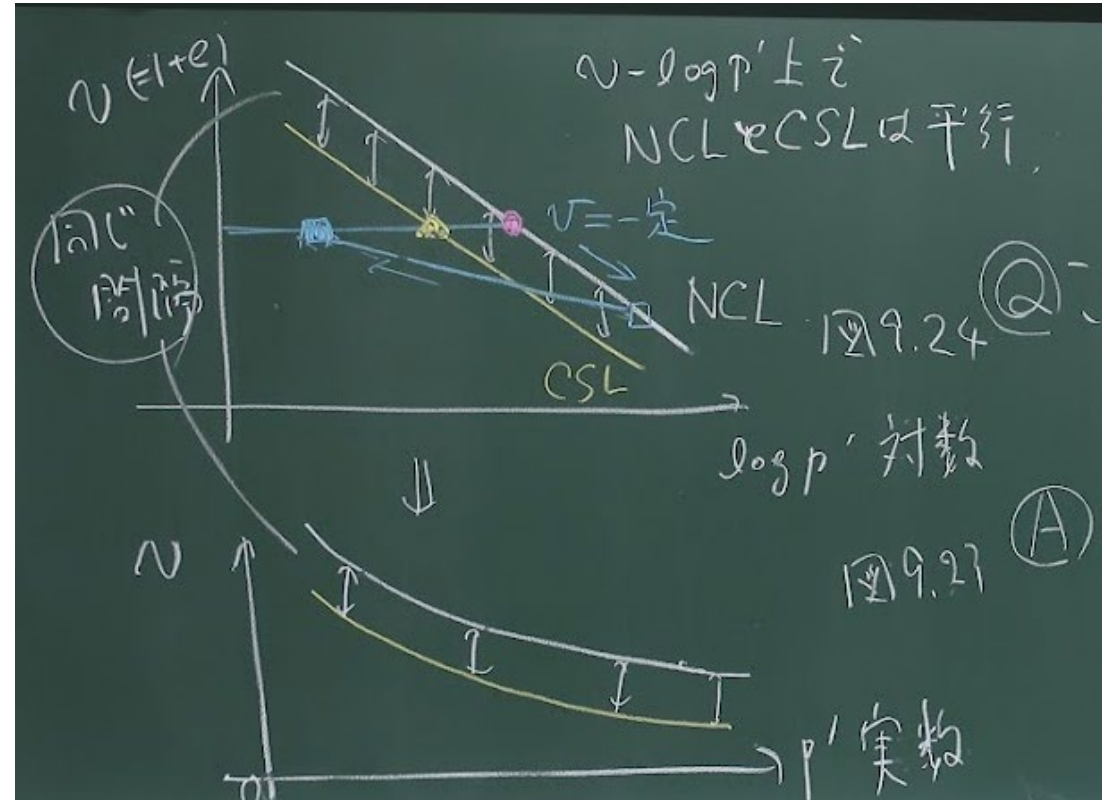
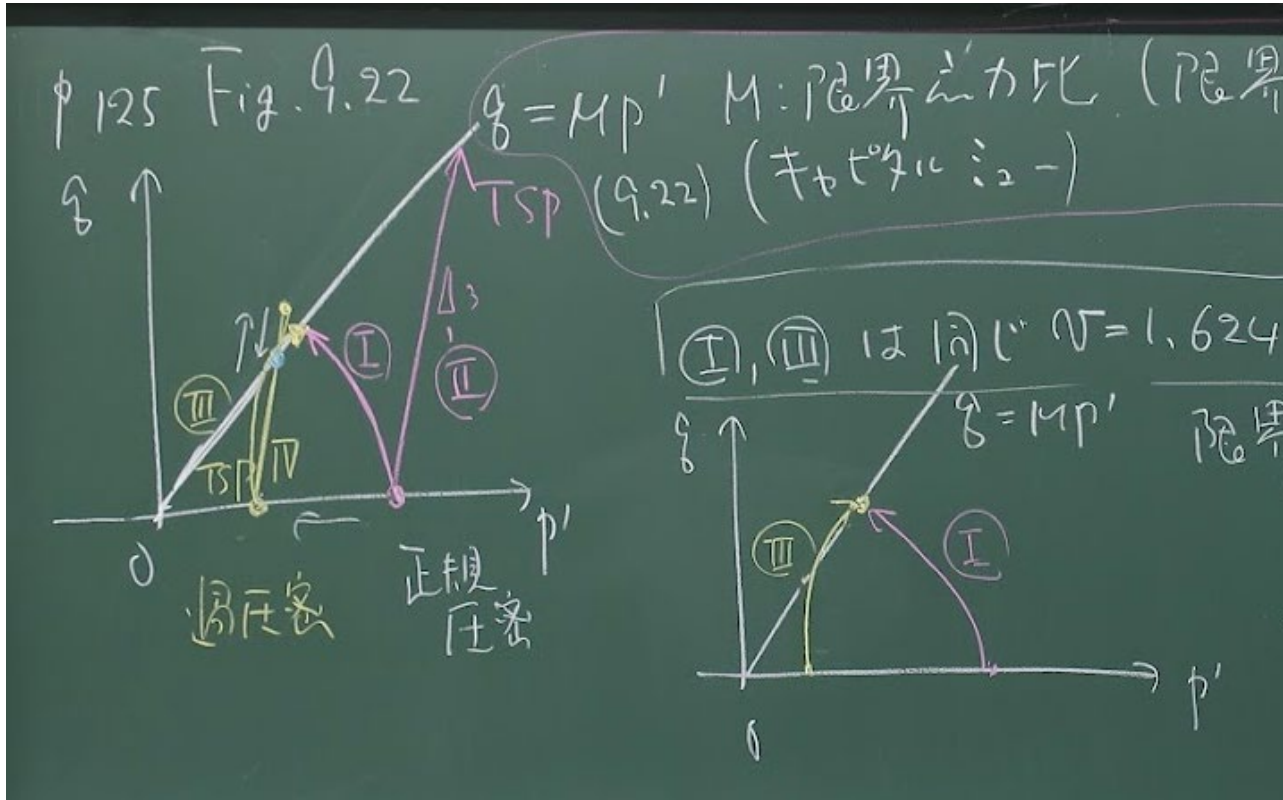
4 パターンの挙動 (スタート)

- 三軸圧縮試験で観察できる挙動
- 2通りの排水条件
 - 排水せん断 (I, III)
 - 非排水せん断 (II, IV)
- 2通りの載荷履歴
 - 正規圧密粘土 (I, II)
 - 重過圧密粘土 (III, IV)
- 計 4 パターンの挙動に大別
- 右：せん断開始時の状態

参考図書：中野正樹 著 地盤工学、コロナ社



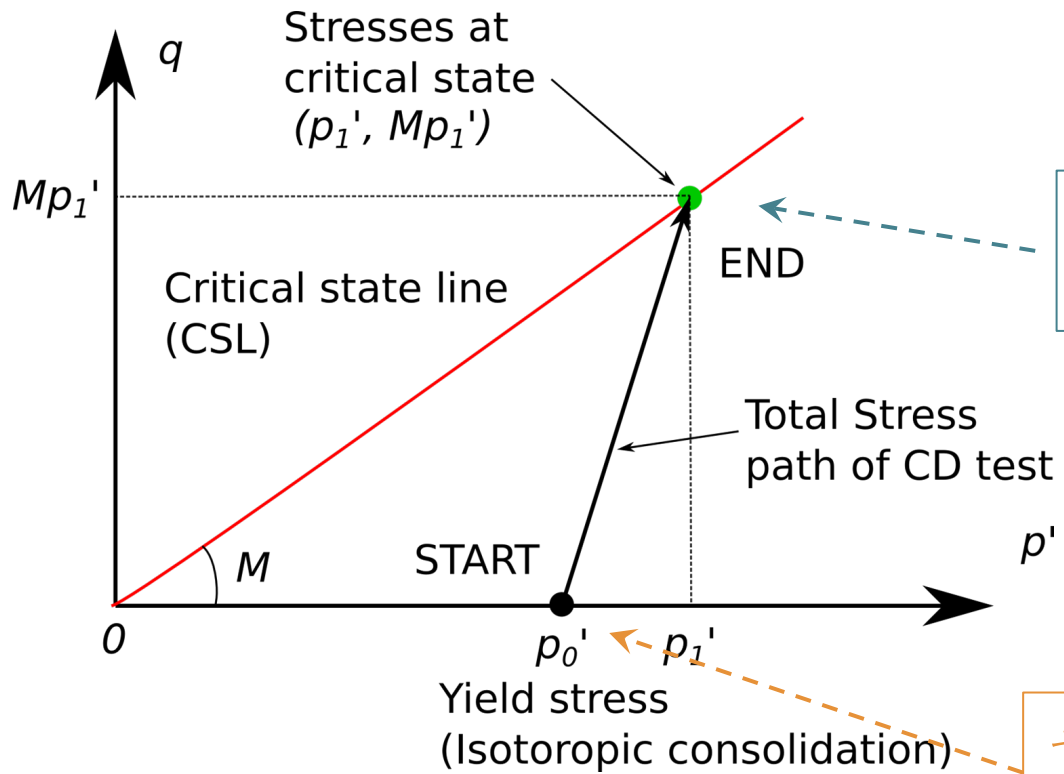
4 パターンの挙動 (ゴール)



(p', q) 面上では限界応力比 (左図)

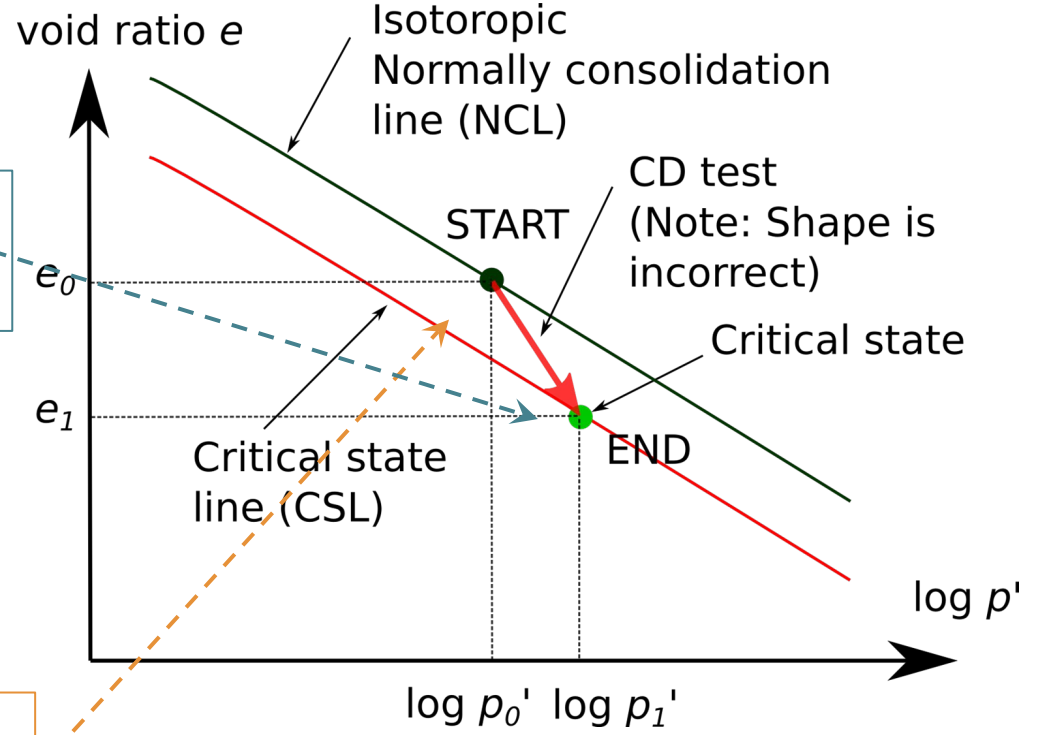
$(\log p', v)$ 面上ではCSL上 (右図)

I. 正規圧密土の排水せん断挙動



せん断終了
=> 限界状態

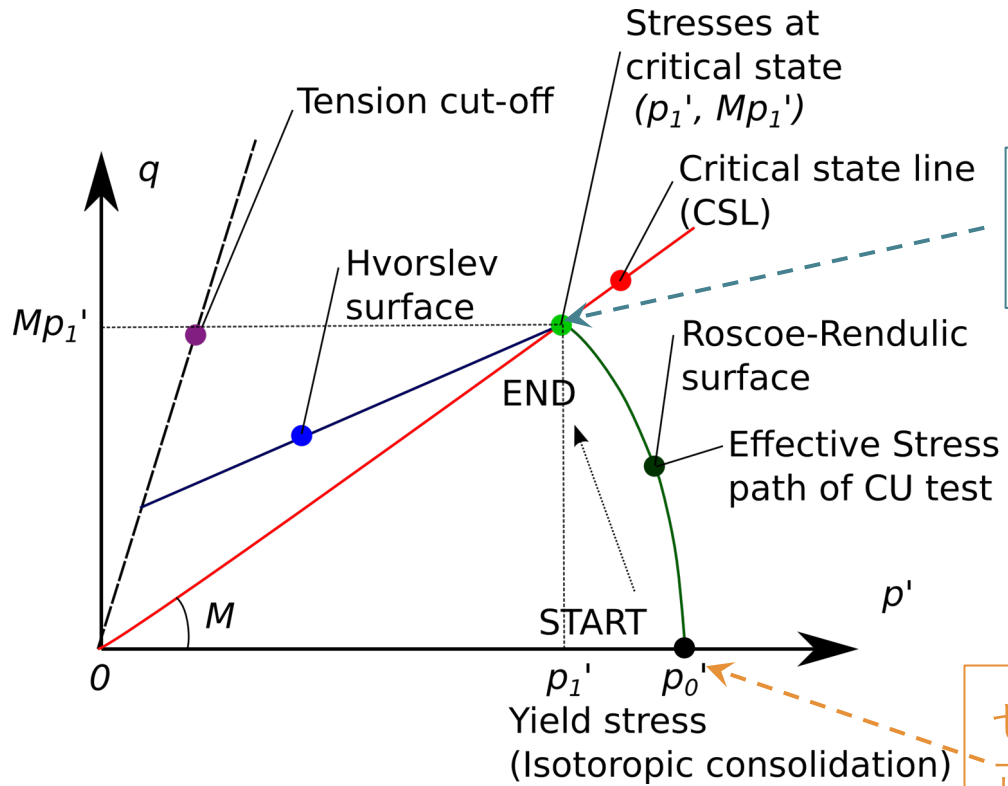
せん断開始 =>
正規圧密状態



最初にCSの (p'_f, q_f) が分かる

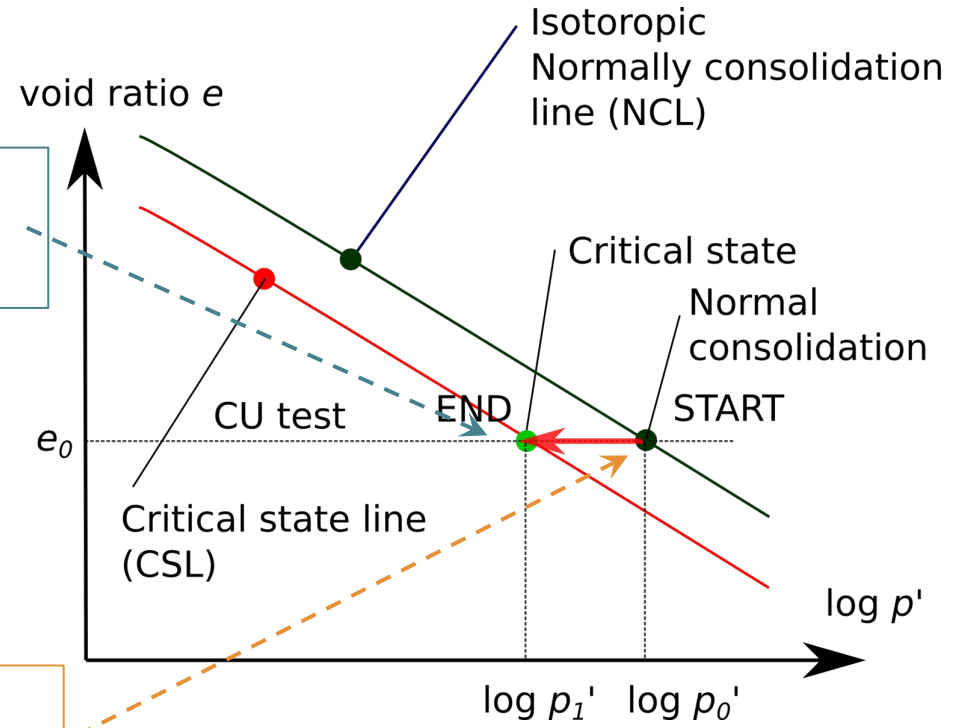
次にCSの v が分かる

II. 正規圧密土の非排水せん断挙動



せん断終了
⇒ 限界状態

せん断開始 ⇒
正規圧密状態

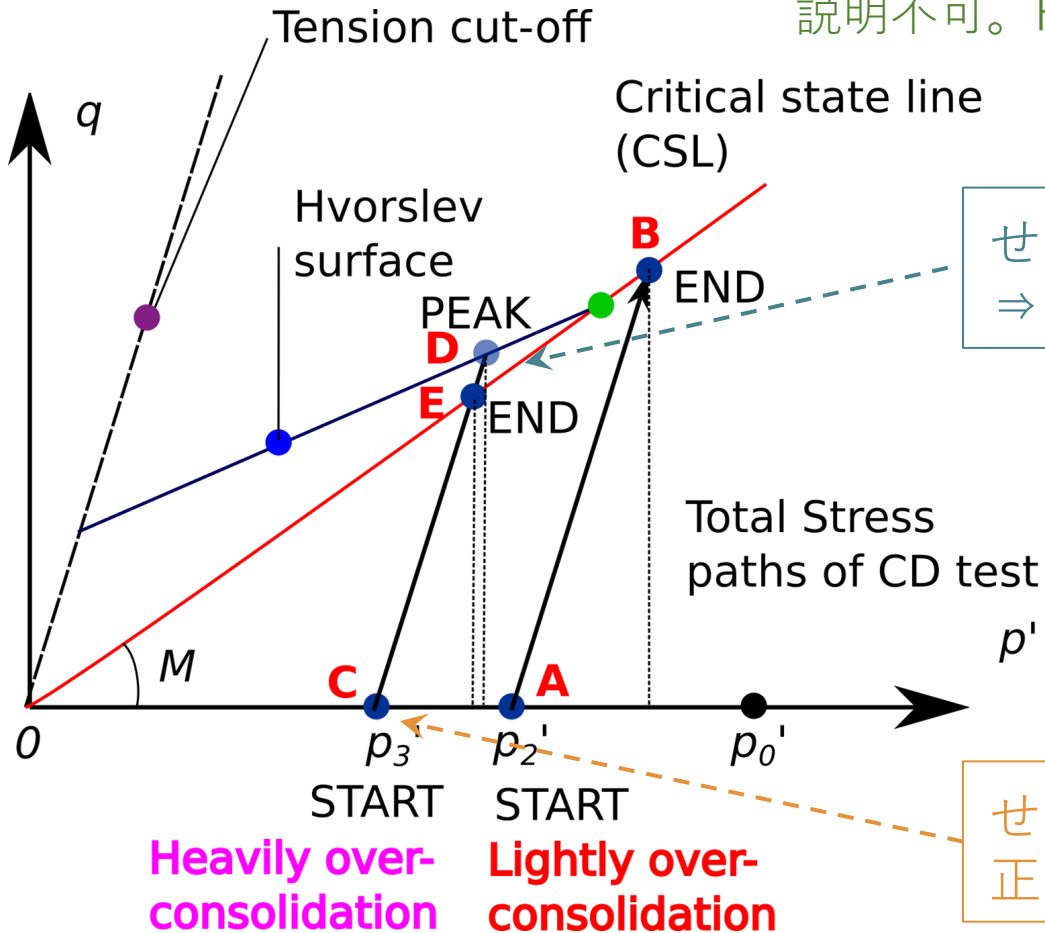


次にCSの q_f が分かる
ESP, TSP の差から過剰間隙水圧も分かる

最初にCSの p_f' が分かる

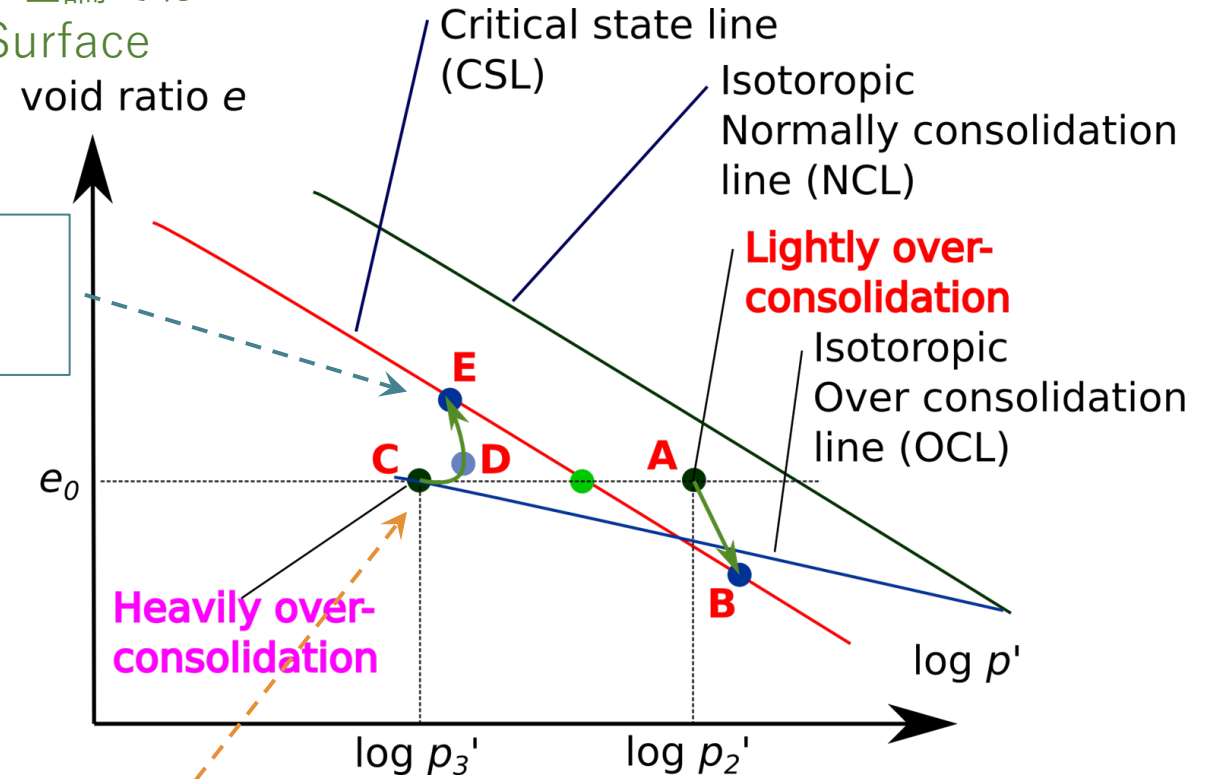
III. 重過正規圧密土の排水せん断挙動

q のピーク (D) はこの理論では説明不可。Hvorslev Surface



せん断終了
⇒ 限界状態

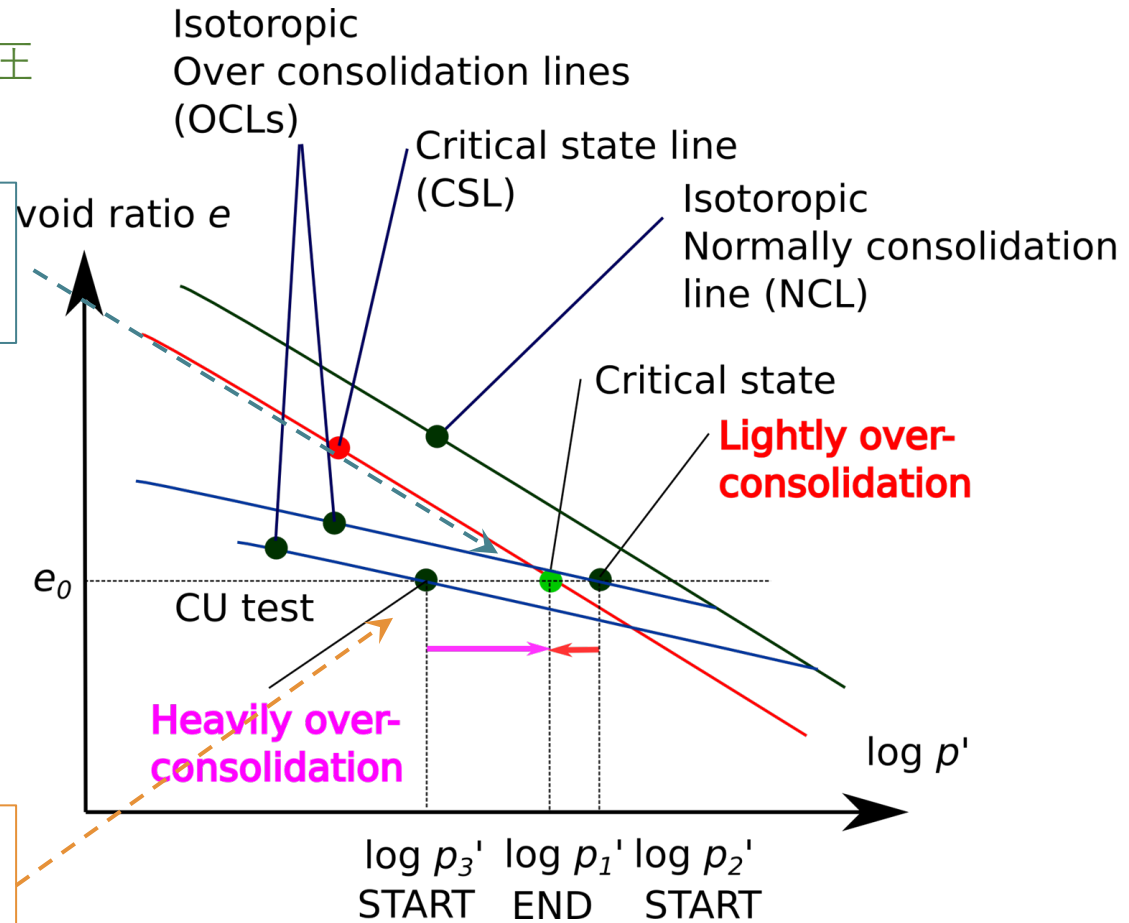
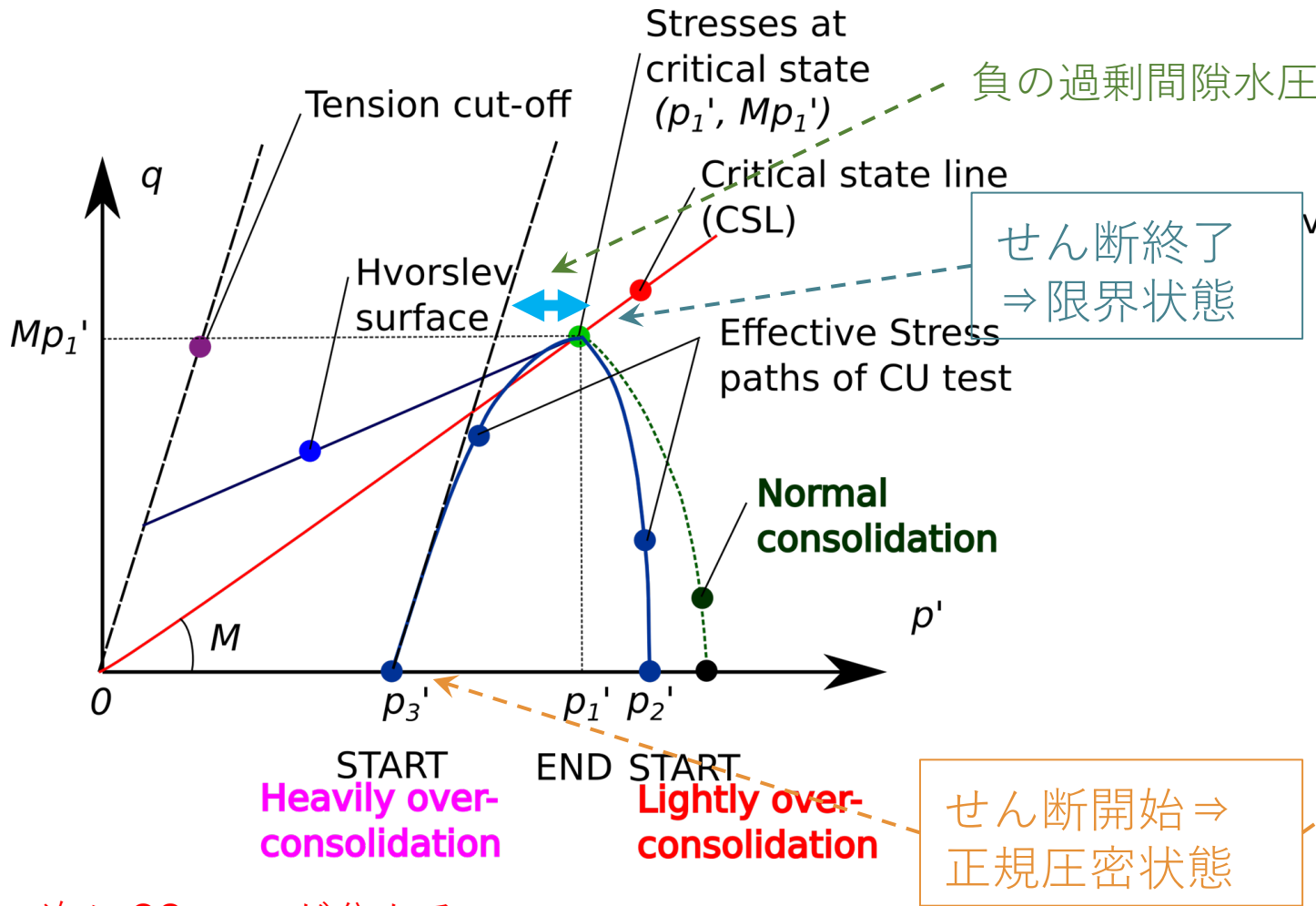
せん断開始 ⇒
正規圧密状態



次にCSの v が分かる

最初にCSの (p'_f, q_f) が分かる

IV. 重過正規圧密土の非排水せん断挙動



次にCSの q_f が分かる
ESP, TSP の差から過剰間隙水圧も分かる

講義のまとめ

- 練返した土の挙動は限界状態理論により (p', q, v) 空間内でその挙動を統一的に表現できることを学んだ。
- 土の取りうる状態は (p', q, v) 空間内の曲面の内部で表現できる。この曲面のことを状態境界面 State boundary surface という。
- 三軸圧縮試験を例に正規圧密土や過圧密土の排水あるいは非排水時のせん断挙動についてその概要を学んだ。